

# Effets des non linéarités géométriques sur les vibrations d'un Jeffcott rotor surcritique – mise en évidence d'un cycle limite pour les modes issus de l'amortissement tournant

O. MONTAGNIER<sup>a</sup>

*a. Centre de Recherche de l'Armée de l'air (CReA)  
Écoles de l'air  
BA 701, 13661 SALON AIR (FRANCE)*

## Résumé :

*On s'intéresse à la stabilité des arbres à grande vitesse de rotation. Cette vitesse est limitée par des modes instables issus de l'amortissement tournant. L'ajout des non linéarités géométriques fait apparaître une bifurcation de Hopf supercritique. Les modes instables sont repoussés vers un cycle limite stable de rayon faible. Ce résultat permet de limiter la dangerosité de ces modes en bloquant la translation des paliers et permettra l'observation et la mesure expérimentale de ces modes.*

## Abstract :

*This work concerned the stability of a non linear Jeffcott rotor. Instabilities due to internal damping occurred in the supercritical range. Geometrical non linearity (shaft with large flexural displacements) is considered. Eigenvalues show the existence of a supercritical Hopf bifurcation. Then, it is showed that previous instabilities become limit cycles with a relatively small radius. This results allow to preserve integrity of the machine if transverse displacement of the shaft is forbidden and will allow us to observe and to measure experimentally this modes.*

**Mots clefs :** Jeffcott rotor, bifurcation de Hopf, amortissement, surcritique

## 1 Introduction

On s'intéresse à la stabilité d'un Jeffcott rotor à grande vitesse de rotation. Il est connu que le Jeffcott rotor possède des modes instables issus de l'amortissement tournant dans le domaine surcritique (vitesse supérieure à la première vitesse critique) [1]. Cependant ces instabilités pouvant entraîner un dommage fatal du système sont-elles limitées par d'autres effets ? Si le Jeffcott rotor est maintenu par deux paliers rotulés sans glissement, l'arbre se rigidifie quand son amplitude augmente. Cette non-linéarité géométrique (du type oscillateur de Duffing) est ajoutée aux équations classiques du Jeffcott rotor. Elle fait apparaître une bifurcation de Hopf supercritique puis des cycles limites stables qui par définition limite l'amplitude des instabilités apparues en linéaire. De plus, les équations non-linéaires possèdent une solution analytique pour le cycle limite. Dans un second temps, on compare les résultats analytiques avec les résultats obtenus par un algorithme de continuation appliqué aux équations complètes. Enfin, une étude paramétrique de la bifurcation est proposée.

## 2 Jeffcott rotor non linéaire et bifurcation de Hopf

Le modèle du disque consiste en une masse  $m$  concentrée en G et située à une distance  $e$  du centre de rotation C (FIG. 1). Sans effet de la gravité et au repos, le centre de rotation est positionné en O. Le repère tournant lié au disque  $(O, \vec{y}_r, \vec{z}_r)$  tourne à la vitesse  $\omega$  par rapport au repère fixe  $(O, \vec{y}, \vec{z})$ . L'arbre de longueur  $l$  au repos, supposé axisymétrique et sans masse, est modélisé par une rigidité de flexion  $k_f$ , une rigidité de tension sur la demi longueur  $k_t$  et un amortissement visqueux interne  $c_i$  selon les directions  $\vec{y}_r$  et  $\vec{z}_r$ . L'amortissement de l'arbre dans la direction de la tension est négligé car du troisième ordre devant l'amortissement en flexion. Les paliers sont supposés infiniment rigide et bloqués latéralement mais dissipe de l'énergie radialement par l'intermédiaire d'un amortissement visqueux externe  $c_e$  selon les directions  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ . La position du centre de rotation dans le repère fixe est donnée par  $(y, z)$ .

L'énergie cinétique du système s'écrit :

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{y}^2 + \dot{z}^2 + e^2\omega^2 - 2e\dot{y}\omega \sin(\omega t) + 2e\dot{z}\omega \cos(\omega t)) + \frac{1}{2}I\omega^2 \quad (1)$$

L'énergie potentielle du système s'écrit :

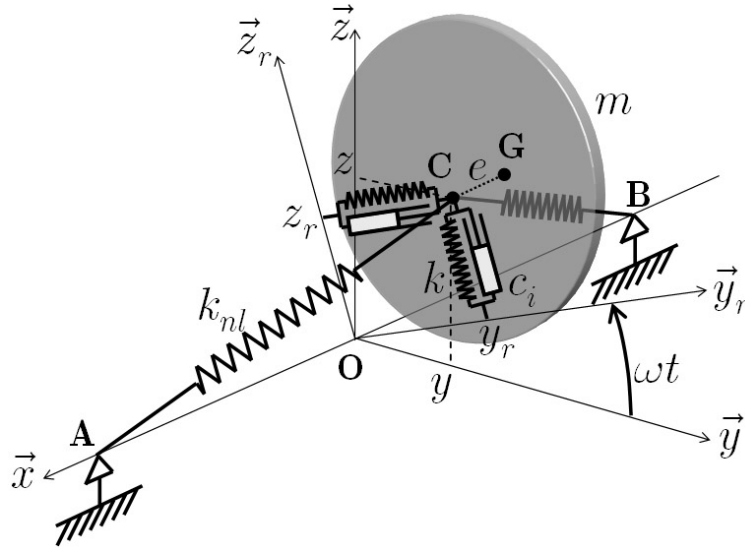


FIGURE 1 – Jeffcott rotor en grand déplacement avec paliers fixes (l'amortissement externe n'est pas représenté)

$$U = \frac{1}{2}k_f(y^2 + z^2) + \frac{1}{4}k_t \left( \sqrt{l^2 + 4y^2 + 4z^2} - l \right)^2 + mg(y + e \sin(\omega t)) \quad (2)$$

La non linéarité géométrique dans l'énergie potentielle est simplement issu du théorème de Pythagore. Par définition, la fonction dissipation est égale à la moitié de la puissance dissipée par les amortisseurs externes et internes. La dissipation visqueuse interne étant proportionnelle à la vitesse de C dans le repère tournant [1], la fonction dissipation s'écrit :

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2}c_e(\dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}c_i((\dot{y} + \omega z)^2 + (\dot{z} - \omega y)^2) \quad (3)$$

On détermine les équations du mouvement à partir des équations de Lagrange :

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right] - \frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial U}{\partial q} = Q, \quad q \in \{y, z\} \quad (4)$$

soit

$$\ddot{y} + (d_e + d_i)\dot{y} + \omega_f^2 y + d_i \omega z + \omega_t^2 \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4y^2 + 4z^2}} \right) y = e\omega^2 \cos(\omega t) \quad (5)$$

$$\ddot{z} + (d_e + d_i)\dot{z} + \omega_f^2 z - d_i \omega y + \omega_t^2 \left( 1 - \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4y^2 + 4z^2}} \right) z = e\omega^2 \sin(\omega t) + g \quad (6)$$

où  $d_e = c_e/m$ ,  $d_i = c_i/m$ ,  $\omega_f = \sqrt{k_f/m}$  et  $\omega_t = \sqrt{2k_t/m}$  sont respectivement le coefficient d'amortissement visqueux massique externe, le coefficient d'amortissement visqueux massique interne, la pulsation propre en flexion du système non amorti et la pulsation propre en tension du système non amorti. Le problème est écrit sous forme adimensionné :

$$Y'' + (D_e + D_i)Y' + Y + D_i\Omega Z + R^2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4Y^2 + 4Z^2}} \right) Y = E\Omega^2 \cos(\Theta) \quad (7)$$

$$Z'' + (D_e + D_i)Z' + Z - D_i\Omega Y + R^2 \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 + 4Y^2 + 4Z^2}} \right) Z = E\Omega^2 \sin(\Theta) + G \quad (8)$$

en posant  $(\cdot)' = (\cdot)/\omega_f = d(\cdot)/d(\omega_f t)$ ,  $Y = y/l$ ,  $Z = z/l$ ,  $D_e = d_e/\omega_f$ ,  $D_i = d_i/\omega_f$ ,  $\Omega = \omega/\omega_f$ ,  $\Omega_t = \omega_t/\omega_f$ ,  $E = e/l$ ,  $\Theta = \omega t$  et  $G = g/(l\omega_f^2)$ . En supposant  $Y$  et  $Z$  petit devant 1, un développement de Taylor à l'ordre 3 des équations précédentes s'écrit :

$$Y'' + (D_e + D_i)Y' + Y + D_i\Omega Z + 2\Omega_t^2(Y^2 + Z^2)Y = E\Omega^2 \cos(\Theta) \quad (9)$$

$$Z'' + (D_e + D_i)Z' + Z - D_i\Omega Y + 2\Omega_t^2(Y^2 + Z^2)Z = E\Omega^2 \sin(\Theta) + G \quad (10)$$

On s'intéresse au cas des oscillations libre et l'effet de la gravité est négligé. Le système d'équation peut être écrit sous la forme d'un système dynamique :

$$x' = f(x) \quad (11)$$

avec

$$x = \begin{pmatrix} Y \\ V \\ Z \\ W \end{pmatrix}, \quad f(x) = \begin{pmatrix} - (D_e + D_i)V - Y - \frac{V}{W} D_i\Omega Z - 2\Omega_t^2(Y^2 + Z^2)Y \\ - (D_e + D_i)W - Z + D_i\Omega Y - 2\Omega_t^2(Y^2 + Z^2)Z \end{pmatrix}, \quad x, f \in \mathbb{R}^4 \quad (12)$$

où  $V$  et  $W$  sont respectivement les vitesses adimensionnées du rotor selon  $\vec{y}$  et  $\vec{z}$ . Les point fixes du système sont solution de  $0 = f(\bar{x})$  soit :

$$0 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{Y} - D_i\Omega\bar{Z} - 2\Omega_t^2(\bar{Y}^2 + \bar{Z}^2)\bar{Y} \\ 0 \\ -\bar{Z} + D_i\Omega\bar{Y} - 2\Omega_t^2(\bar{Y}^2 + \bar{Z}^2)\bar{Z} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} \in \mathbb{R}^4 \quad (13)$$

en écrivant  $-\bar{Z} \times f_2(\bar{x}) + \bar{Y} \times f_4(\bar{x}) = 0$ , on obtient  $D_i\Omega(\bar{Z}^2 + \bar{Y}^2) = 0$  d'où  $\bar{Y} = \bar{Z} = 0$ . L'unique point fixe est  $\bar{x} =^T (0 \ 0 \ 0 \ 0)$ . La stabilité linéaire du système autour de la position d'équilibre est obtenue en perturbant de  $\varepsilon(t) \in \mathbb{R}^4$  le système dynamique. En négligeant les termes quadratiques en  $\varepsilon$ , le système se réduit au système linéaire différentiel :

$$\varepsilon' = Df(\bar{x})\varepsilon \quad (14)$$

où  $Df(\bar{x})$  est la matrice Jacobienne de  $f$  c'est à dire  $Df_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ . La solution de Eq. (14) est :

$$\varepsilon(t) = e^{Df(\bar{x})t} \varepsilon(0) \quad (15)$$

avec

$$Df(\bar{x}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -D_e - D_i & -D_i\Omega & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ D_i\Omega & 0 & -1 & -D_e - D_i \end{pmatrix} \quad (16)$$

Les valeurs propres complexes de  $Df(\bar{x})$  sont :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left( -(D_e + D_i) - 2\sqrt{-\Omega_d^2 - iD_i\Omega} \right) \quad (17)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left( -(D_e + D_i) + 2\sqrt{-\Omega_d^2 + iD_i\Omega} \right) \quad (18)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left( -(D_e + D_i) - 2\sqrt{-\Omega_d^2 + iD_i\Omega} \right) \quad (19)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2} \left( -(D_e + D_i) + 2\sqrt{-\Omega_d^2 - iD_i\Omega} \right) \quad (20)$$

en posant  $\omega_d^2 = \omega_f^2 - \frac{1}{4}(d_e + d_i)^2$  soit  $\Omega_d^2 = 1 - \frac{1}{4}(D_e + D_i)^2$  avec  $\Omega_d = \omega_d / \omega_f$ . Le calcul des racines complexes donne les valeurs propres sous la forme partie réelle (amortissement) et partie imaginaire (pulsation) :

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left( -(D_e + D_i) + \sqrt{2}\sqrt{-\Omega_d^2 + \sqrt{\Omega_d^4 + D_i^2\Omega^2}} - i\sqrt{2}\sqrt{\Omega_d^2 + \sqrt{\Omega_d^4 + D_i^2\Omega^2}} \right) \quad (21)$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left( -(D_e + D_i) + \sqrt{2}\sqrt{-\Omega_d^2 + \sqrt{\Omega_d^4 + D_i^2\Omega^2}} + i\sqrt{2}\sqrt{\Omega_d^2 + \sqrt{\Omega_d^4 + D_i^2\Omega^2}} \right) \quad (22)$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{2} \left( -(D_e + D_i) - \sqrt{2} \sqrt{-\Omega_d^2 + \sqrt{\Omega_d^4 + D_i^2 \Omega^2}} - i \sqrt{2} \sqrt{\Omega_d^2 + \sqrt{\Omega_d^4 + D_i^2 \Omega^2}} \right) \quad (23)$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2} \left( -(D_e + D_i) - \sqrt{2} \sqrt{-\Omega_d^2 + \sqrt{\Omega_d^4 + D_i^2 \Omega^2}} + i \sqrt{2} \sqrt{\Omega_d^2 + \sqrt{\Omega_d^4 + D_i^2 \Omega^2}} \right) \quad (24)$$

Ces valeurs propres sont généralement exprimées sous forme approchée [1].

Les valeurs propres sont deux paires de complexes conjuguées  $(\lambda_1, \lambda_2)$  et  $(\lambda_3, \lambda_4)$ . Les modes 3 et 4 sont linéairement stable car  $\Re(\lambda_3) = \Re(\lambda_4) < 0$ . Les deux autres peuvent être instables quand  $\Omega$  est suffisamment grand pour que  $\Re(\lambda_1) = \Re(\lambda_2) > 0$  c'est à dire sous forme exacte :

$$\Omega > 1 + \frac{D_e}{D_i} \quad (25)$$

Un système possédant deux valeurs propres complexes conjuguées dont la partie réelle change de signe présente une bifurcation de Hopf [2]. Quand  $\Omega = 1 + \frac{D_e}{D_i}$ , le système est au point de bifurcation de Hopf. La branche solution  $(\bar{x} =^T (0 \ 0 \ 0 \ 0))$  passe de stable à instable et il apparaît un cycle stable si la bifurcation est surcritique. Les Eqs. (9-10) sans second membre possède une solution exacte de type cycle limite ce qui démontre son existence. En effet, en posant  $X = Y + iZ$ , ce système s'écrit sous la forme suivante :

$$X'' + (D_e + D_i)X' + (1 - iD_i\Omega)X + 2\Omega_t^2|X|^2X = 0 \quad (26)$$

Une solution de type cycle limite peut s'écrire sous la forme  $\bar{X} = \bar{R}e^{i\bar{\Omega}t}$  avec  $\bar{R}, \bar{\Omega} \in \mathbb{R}^2$  où  $\bar{R}$  est le rayon du cycle et  $\bar{\Omega}$  la vitesse de rotation du cycle. En injectant cette solution dans l'équation précédente, il vient :

$$(-\bar{\Omega}^2 + (D_e + D_i)i\bar{\Omega} + (1 - iD_i\Omega) + 2\Omega_t^2\bar{R}^2) \bar{R}e^{i\bar{\Omega}t} = 0 \quad (27)$$

soit en séparant la partie réelle de la partie imaginaire

$$-\bar{\Omega}^2 + 1 + 2\Omega_t^2\bar{R}^2 = 0 \quad (28)$$

$$(D_e + D_i)\bar{\Omega} - D_i\Omega = 0 \quad (29)$$

Si  $\Omega \geq 1$ , c'est à dire à partir de la bifurcation de Hopf, il existe une solution à ces équations

$$\bar{\Omega} = \frac{D_i}{D_e + D_i} \Omega \quad (30)$$

$$\bar{R} = \frac{1}{\sqrt{2}\Omega_t} \sqrt{\bar{\Omega}^2 - 1} \quad (31)$$

d'où la solution dans le plan complexe

$$\bar{X} = \frac{1}{\sqrt{2}\Omega_t} \sqrt{\left(\frac{D_i}{D_e + D_i}\right)^2 \Omega^2 - 1} e^{i\frac{D_i}{D_e + D_i} \Omega t} \quad (32)$$

L'évolution de la vitesse de parcours du cycle est linéaire en  $\Omega$ . De même l'évolution du rayon est linéaire en  $\Omega$  quand  $\Omega \gg 1$  car  $\bar{R} \rightarrow \bar{\Omega}/\sqrt{2}\Omega_t$ . On note aussi qu'au point de bifurcation de Hopf le rayon du cycle est nul mais sa vitesse est non nulle. Enfin, on remarque que la solution n'est pas écrite sous la *forme normale* classique  $\bar{\chi} = \sqrt{\Re(\lambda_1)} e^{i\Im(\lambda_1)t}$  [2] car le problème a été résolu dans l'espace physique et non pas dans celui de la forme normale.

### 3 Analyse numérique de la bifurcation

L'étude numérique est réalisée à partir des équations non linéaires sans approximation, c'est à dire les Eqs.(7-8) sans second membre, mises sous la forme du système dynamique suivant :

$$x' = h(x) \quad (33)$$

avec

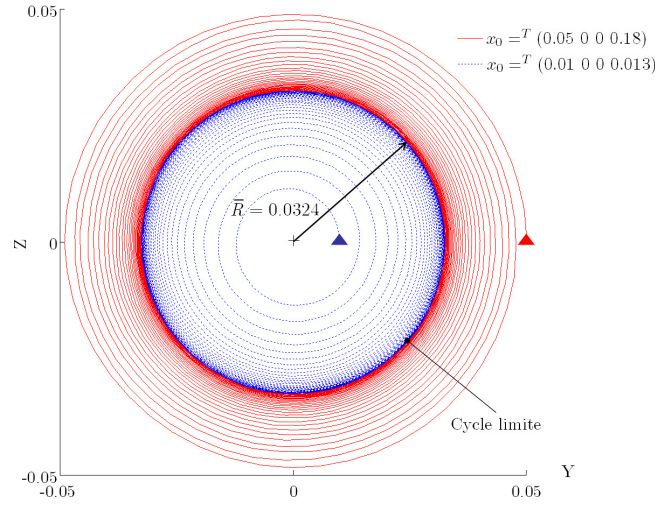


FIGURE 2 – Simulation temporelle du comportement du rotor après la bifurcation de Hopf ( $\Omega_t = 50$ ,  $\Omega = 5$ ,  $D_e = D_i = 0.1$ ).

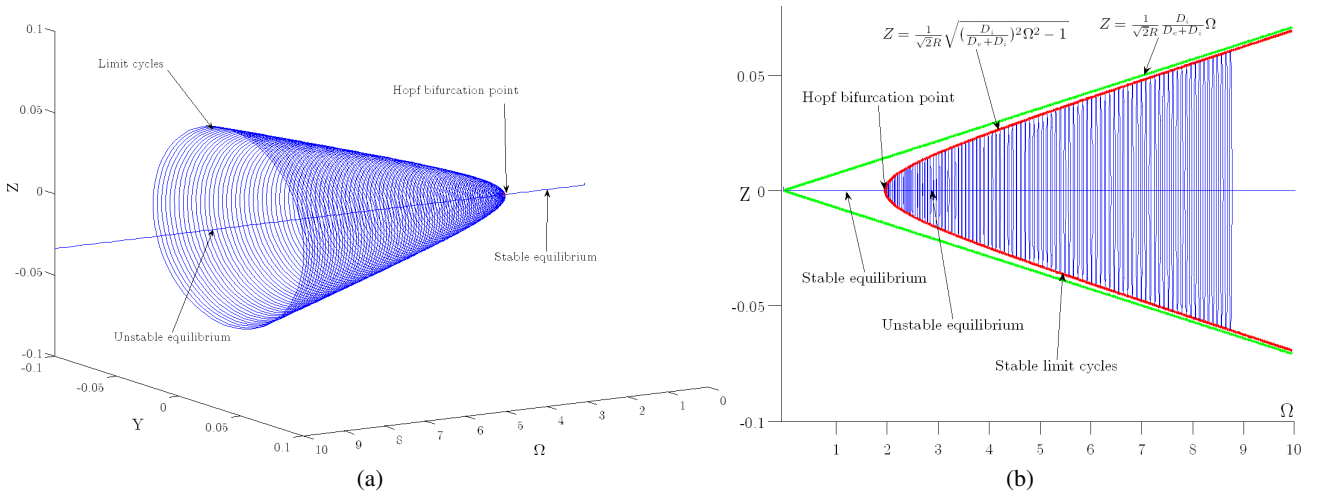


FIGURE 3 – Bifurcation de Hopf et cycle limite du rotor dans l'espace physique ( $Y, Z$ ) obtenu par continuation de l'Eq. (33) avec [3] (a) et comparaison avec la solution analytique (b)

$$x = \begin{pmatrix} Y \\ V \\ Z \\ W \end{pmatrix}, \quad h(x) = \begin{pmatrix} V \\ -(D_e + D_i)V - Y - D_i\Omega Z - \Omega_t^2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+4Y^2+4Z^2}}\right) Y \\ W \\ -(D_e + D_i)W - Z + D_i\Omega Y - \Omega_t^2 \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+4Y^2+4Z^2}}\right) Z \end{pmatrix}, \quad x, f \in \mathbb{R}^4 \quad (34)$$

Il est nécessaire d'estimer la valeur de certains paramètres. On considère le cas d'un arbre élastique homogène de module  $E_a$  et de section circulaire constante de rayon  $r$ . On a alors la rigidité de l'arbre en tension  $k_t = E_a S/l = E_a \pi r^2/l$  et en flexion  $k_f = 48 E_a I/l^3 = 12 E_a \pi r^4/l^3$ . On en déduit le rapport  $\Omega_t = l/r\sqrt{6}$ . Pour  $r = 0.01$  m et  $l = 1.2$  m, on obtient une valeur représentative  $\Omega_t \approx 50$ . Il reste à estimer  $D_e$  et  $D_i$ , on prendra  $D_e = D_i = 0.1$  d'après [5] d'où l'apparition de la bifurcation pour  $\Omega > 2$ .

Une simulation temporelle pour  $\Omega = 5$  (FIG. 2) montre le comportement attendu, le rotor a tendance à converger, quelque soit sa position initiale, vers un cycle limite de rayon  $\bar{R} = 0.0324$  (aussi obtenu par l'Eq. (31)). La bifurcation de Hopf et le cycle limite peuvent aussi être obtenus à l'aide d'un algorithme de continuation. Cette analyse a été réalisée à l'aide du logiciel Matlab [4] et de la boîte à outils freeware Matcont [3]. A partir des équations sans développement de Taylor, elle confirme la présence du cycle limite pour  $\Omega > 2$  (FIG. 3a). L'enveloppe des cycles est parfaitement décrite par la solution analytique Eq. (31) (FIG. 3b). On remarquera que l'amplitude des cycles est relativement faible, par exemple pour le cas proposé quand  $\Omega = 3$ , le rayon du cycle vaut  $\bar{R} = 0.0158$  soit  $\bar{r} = 19$  mm.

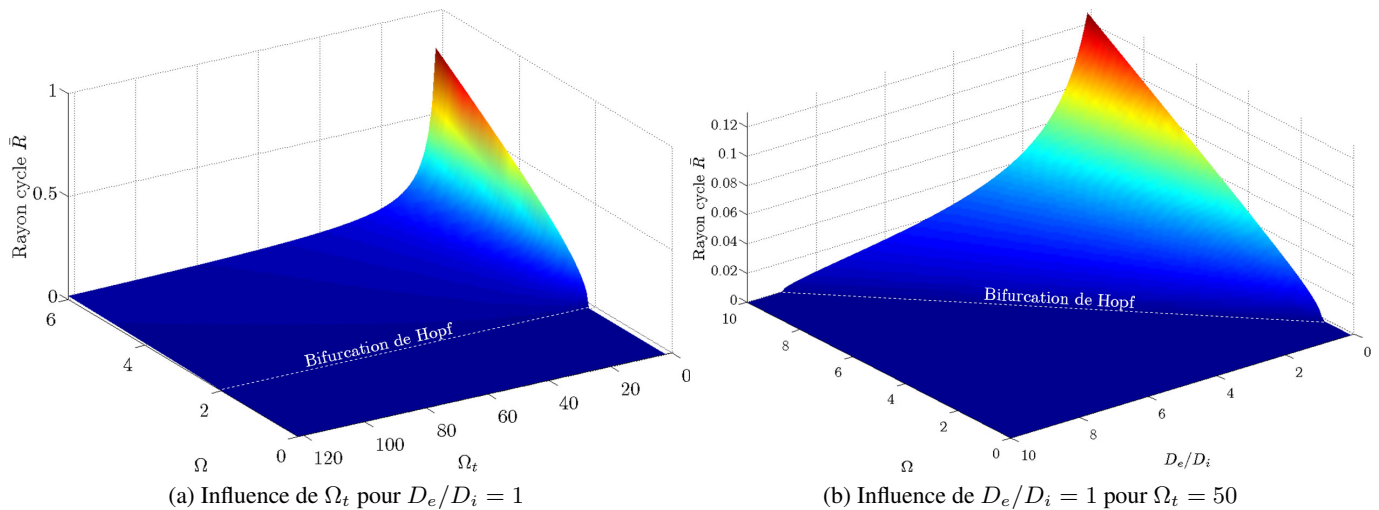


FIGURE 4 – Diagramme de bifurcation représentant uniquement les solutions stables d'un Jeffcott rotor avec un arbre de section circulaire. L'amplitude correspond au rayon  $\bar{R} = \sqrt{\bar{Y}^2 + \bar{Z}^2}$ .

## 4 Étude paramétrique de la bifurcation

Deux diagrammes de bifurcation sont réalisés (FIG. 4). Le premier montre l'influence de la forme de l'arbre (rapport  $l/r$ ) puisque le rapport des fréquences propres de tension et de flexion  $\Omega_t$  vaut  $l/r\sqrt{6}$ . La FIG. 4a montre que l'amplitude augmente fortement quand l'arbre est court (inversement proportionnel à  $\bar{R}$ ), cependant dans ce cas la fréquence propre de flexion augmente aussi. Quand l'arbre est très effilé ( $\Omega_t > 50$ ) l'amplitude de la bifurcation est faible. Ceci laisse penser que des arbres fonctionnant dans le domaine surcritique peuvent être en présence d'une instabilité par amortissement tournant sans qu'elle soit remarquée. En effet, son amplitude faible peut être confondu avec des effets de balourd, la seule différence apparente est fréquentielle puisque la vitesse du cycle ne correspond pas à la vitesse du rotor. La FIG. 4b montre l'influence du rapport amortissement externe/interne ( $D_e/D_i$ ). On retrouve le résultat classique obtenu en linéaire : *l'amortissement externe repousse l'instabilité alors que l'amortissement interne la rapproche de  $\Omega = 1$* . On remarque aussi qu'après l'instabilité un rapport  $D_e/D_i$  faible implique une amplitude de cycle rapidement grande.

## 5 Conclusion

On a montré que le Jeffcott rotor en présence d'amortissement interne et des non-linéarités géométriques possède une bifurcation de Hopf supercritique et un cycle limite stable dans le domaine surcritique. Ce cycle possède une solution analytique simple. L'étude du cycle limite a montré que son rayon était dans certains cas suffisamment petit pour garantir l'intégrité du système. On peut même penser que cette instabilité a pu ne pas être détectée en pratique car confondue avec les effets du balourd. Ce résultat permet de limiter la dangerosité de ces modes toutefois cela suppose de bloquer la translation des paliers. Enfin, ce résultat semble être une avancée pour l'observation et la mesure expérimentale de ces modes. On notera tout de même que le modèle d'amortissement visqueux est peu réaliste et généralement remplacé par un modèle hystérétique [5]. Il sera aussi nécessaire de vérifier l'influence de l'amortissement dans la partie non linéaire négligé ici.

## Remerciements

Je tiens à remercier F. Finet et P. Guilbaud, élèves ingénieurs de deuxième année à l'École de l'air, pour leur réflexion sur ce sujet.

## Références

- [1] Tondl A. Some Problems of Rotor Dynamics. Chapman & Hall, 1965.
- [2] Kuznetsov Y. Elements of applied bifurcation theory. Springer, 1998.
- [3] Dhooge A., Govaerts W., and Kuznetsov Y. MATCONT : A MATLAB package for numerical bifurcation analysis of ODEs. ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS), 29(2), 141–164, 2003.
- [4] The MathWorks . MATLAB. The MathWorks, Inc., <http://www.mathworks.com>, 1990.
- [5] Montagnier O. and Hochard C. Dynamic instability of supercritical driveshafts mounted on dissipative supports – effect of viscous and hysteretic internal damping. Journal of Sound and Vibration, 305, 378–400, 2007.